INSTITUT NATIONAL SUPERIEUR DE CHIMIE INDUSTRIELLE DE ROUEN

MATHÉMATIQUES 1984

DURÉE : 4 heures

Le sujet se compose de 4 exercices et d'un problème.

EXERCICES

1. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \sin t}$$

2. Trouver la fonction y, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin^4 x \\ y(0) = y'(0) = 0 . \end{cases}$$

3. On considère la série entière :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} .$$

Trouver son rayon de convergence ρ, et sa nature pour $x = \rho$ et $x = -\rho$.

Exprimer sa somme à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-\rho, +\rho[$.

4. Trouver la fonction $f : (x, y) \longrightarrow f(x, y)$, définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 - y^2 \\ f(x, 0) = f(x, x) = 0 \end{cases}$$

On utilisera le changement de variables $u = x + y \qquad v = x - y$.

PROBLÈME

Soient :

p un entier supérieur ou égal à 2;

$(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de réels, deux à deux distincts;

E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$;

.../...

Φ l'application de E × E dans $\mathbb{R}$ qui, à (f, g), associe :

$$\Phi(f, g) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)\, g(x_i).$$

Les polynômes qui interviennent dans l'énoncé sont des polynômes à une indéterminée x, à coefficients réels. On confondra un tel polynôme avec la fonction polynôme associée. Pout tout entier n, positif ou nul, on désigne par V_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Première partie

On donne deux familles de réels : $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ et $(\beta_k)_{2 \leqslant k \leqslant p}$.

On définit une famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ de polynômes par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = x + \alpha_1 \end{cases}$$

et, pour $2 \leqslant k \leqslant p$:

(1) $$P_k = (x + \alpha_k) P_{k-1} + \beta_k P_{k-2}.$$

1. *a.* Quel est le degré de P_k? Quel est son terme de degré maximum?

   b. Montrer que, pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant p$, la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de V_n.

2. *a.* Montrer qu'on peut choisir les α_k et les β_k pour que :

   $$\Phi(P_1, P_0) = 0$$

   et, pour tout k tel que $2 \leqslant k \leqslant p$:

   $$\Phi(P_k, P_{k-1}) = \Phi(P_k, P_{k-2}) = 0.$$

   Dans toute la suite, on suppose que les α_k et les β_k ont les valeurs trouvées.

   b. Montrer que, pour tout k tel que $2 \leqslant k \leqslant p$:

   $$\beta_k = -\frac{\sum_{i=1}^{p} [P_{k-1}(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^{p} [P_{k-2}(x_i)]^2}.$$

3. On suppose, *uniquement dans cette question* :

   $$p = 3 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2.$$

   Calculer les coefficients des polynômes P_k $(0 \leqslant k \leqslant 3)$.

4. *a.* Montrer que, quels que soient les entiers k et l vérifiant $0 \leqslant l < k \leqslant p$, on a :

   $$\Phi(P_k, P_l) = 0.$$

   Indications : Utiliser la formule (1) et le résultat de la question 1.*b*.

b. En déduire que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$ et pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à k :

$$\Phi(P_k, Q) = 0 .$$

5. Montrer que les polynômes P_p et $Q = \prod_{i=1}^{p} (x - x_i)$ sont égaux.

Indication : Considérer $P_p - Q$.

Deuxième partie

Soit f une fonction donnée, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. A tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant p - 1$, on associe l'application Ω_n de V_n dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Omega_n(P) = \sum_{i=1}^{p} [f(x_i) - P(x_i)]^2 .$$

a. Soient $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ les coordonnées de P dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ définie dans la première partie :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k .$$

Établir la formule :

$$\Omega_n(P) = \Phi(f,f) + \sum_{k=0}^{n} [a_k^2 \Phi(P_k, P_k) - 2 a_k \Phi(P_k, f)].$$

b. En déduire que Ω_n possède un minimum absolu strict μ_n. Calculer μ_n et les coordonnées dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ du polynôme P tel que $\Omega_n(P) = \mu_n$, en fonction des réels $\Phi(f, f)$, $\Phi(P_k, f)$, $\Phi(P_k, P_k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

c. Montrer, pour $0 \leqslant n \leqslant p - 2$:

$$\mu_n \geqslant \mu_{n+1} .$$

2. On suppose, uniquement dans cette question :

$$p = 3 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2 \qquad f(x) = x^3 .$$

Calculer μ_0, μ_1, μ_2.

3. *a.* Montrer qu'il existe un polynôme P et un seul qui satisfait aux deux conditions suivantes :

— son degré est inférieur ou égal à $p - 1$;

— pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$: $P(x_i) = f(x_i)$.

b. En déduire la valeur de μ_{p-1}.